DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, f est une fonction à valeurs réelles, définie sur $[0, +\infty[$, intégrable sur tout intervalle $[0,A] \subset [0, +\infty[$, et λ est une fonction positive non bornée, définie et croissante au sens large sur $[0, +\infty[$.

On désigne par E l'ensemble des réels x tels que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-x\lambda(t)}\, dt$$

soit convergente et par $\varphi(x)$ sa valeur en tout point x de E.

I

Dans cette partie, on suppose de plus f à valeurs positives ou nulles mais, sauf indication contraire, on ne fait sur f et sur λ aucune hypothèse supplémentaire de continuité ou de dérivabilité.

1. Montrer que si E n'est pas vide, c'est une demi-droite ou $\mathbb{R}$ lui-même.

2. Dans cette question, on cherche, pour λ donnée, des exemples de fonctions f illustrant diverses éventualités pour E.

a. Exprimer en fonction de λ une fonction f telle que E soit vide.

b. Donner à l'aide de λ un exemple de fonction f telle que $E = \mathbb{R}$.

c. En supposant λ dérivable, donner un exemple de fonction f telle que $E =]0, +\infty[$, puis un autre exemple tel que $E = [0, +\infty[$.

3.*a*. Etablir la continuité de φ à droite en tout point x de E.

b. Etablir la continuité de φ en tout point x intérieur à E.

4. On suppose dans cette question que E n'est pas vide et ne coïncide pas avec $\mathbb{R}$, et on désigne par a la borne inférieure de E.

a. Montrer que si φ est bornée sur E, a appartient à E.

b. Si a n'appartient pas à E, comment se comporte φ quand x tend vers a en restant dans E ?

5. Soit u_n le terme général positif d'une série, et soit α_n le terme général positif d'une suite croissante non bornée. On suppose que la série de terme général $u_n e^{-x\alpha_n}$ converge pour tout $x > 0$, sa somme ayant en outre une limite ℓ dans $\mathbb{R}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives. La série de terme général u_n est-elle convergente et, si oui, quelle est sa somme ?

II

Dans cette partie, on suppose que λ admet sur $[\,0, +\infty\,[$ une dérivée λ' continue, et que f est continue sur $[\,0, +\infty\,[$ mais peut prendre des valeurs de signe quelconque.

1.*a*. Soit G une fonction à valeurs réelles, définie, continue et bornée sur $[\,0, +\infty\,[$. Montrer que l'intégrale

$$\psi(y) = \int_0^{+\infty} y\, G(t)\, \lambda'(t)\, e^{-y\lambda(t)} dt$$

converge pour tout y de $]0, +\infty\,[$.

b. Montrer que si x appartient à E, il en est de même de x + y pour tout y positif. En déduire les différentes formes possibles de l'ensemble E.

2.*a*. Si de plus G admet une limite ℓ quand t tend vers $+\infty$, montrer que la fonction ψ tend vers ℓ quand y tend vers 0 par valeurs strictement positives.

b. En déduire que φ est continue à droite en tout point de E.

3. Dans cette question, on choisit $f(t) = \cos t$ et $\lambda(t) = t$.

a. Quel est l'ensemble E ? Est-il fermé dans R ?

b. Quelle est la limite de φ lorsque x tend vers la borne inférieure a de E ? Comparer cette situation avec celle étudiée dans la question **I.4.*a***.

c. L'intégrale qui définit $\varphi(x)$ est-elle absolument convergente pour toute valeur x de E ?

4. Dans cette question, on choisit $f(t) = \cos t$ et $\lambda(t) = \sqrt{t}$.

a. Quel est l'ensemble E ?

b. Quelle est la limite de φ lorsque x tend vers la borne inférieure a de E ?

c. L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t \cos t}{1+t}\, e^{-x\sqrt{t}}\, dt$$

admet-elle une limite dans R lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives ?

5. Dans cette question, on choisit $f(t) = \cos t$ et $\lambda(t) = \ln(t+1)$.

a. Quel est l'ensemble E ?

b. Quel est l'ensemble des points x de E pour lesquels l'intégrale qui définit $\varphi(x)$ est absolument convergente ?

c. Trouver la limite de φ lorsque x tend vers la borne inféricure a de E.

6. On suppose en outre dans cette question que E contient $]\,0, +\infty\,[$, que φ a une limite ℓ dans R lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, que le produit $f\lambda$ a une limite nulle lorsque t tend vers $+\infty$, et enfin que la fonction λ vérifie l'hypothèse suivante :

H : il existe un réel $K > 0$ tel que, pour tout t assez grand, $\lambda(t) \geqslant Kt$.

a. Trouver, lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives, la limite de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (1 - e^{-x\lambda(t)})\, f(t)\, dt.$$

b. Montrer que 0 appartient à E.

c. Comment pourrait-on simplifier la preuve de l'appartenance de 0 à E si l'hypothèse H était remplacée par :

H' : il existe un réel $K > 0$ et un réel $\alpha > 1$ tels que, pour tout t assez grand, $\lambda(t) \geqslant K t^{\alpha}$,

les autres hypothèses restant inchangées ?
